ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αποδειξτε ότι : « Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε : $f'(x_0)=0$ »

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της τότε ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της»

1. Χαρακτηρίστε την παρακάτω πρότασης ως Αληθής ή Ψευδής.
2. Δικαιολογήστε την παραπάνω απάντησή σας.

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ ;

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) :

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε η f' είναι συνεχής στο σημείο αυτό .
2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).
3. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.
4. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in R$ έχει μόνο μια θέση ολικού μεγίστου.
5. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράστασή της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ :

Α1 : Σχολικό σελίδα 142.

Α2: 1. Ψ .

2. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^4$ είναι κυρτή αλλά ισχύει ότι $f''(x)=12x^2\geq 0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α3 : Σχολικό σελίδα 185.

Α4 1. Λ 2.Λ 3.Σ 4.Λ 5.Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, αν υπάρχουν.

Β3. Να βρείτε της ασύμπτωτες της C_f .

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α(0, $f(0)$).

Β5. Να αποδείξετε την ανισότητα : $(x^2 + 4x + 2) \cdot e^x \geq 6x + 2$, $για\ x \geq -2$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ :

Πεδίο ορισμού το R .

Β1 . $f'(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 4}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα$(-\infty, -3-\sqrt{3}]$ και $[-3+\sqrt{3}, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$ και συνεχής στο R , οπότε στο$-3-\sqrt{3}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο$-3+\sqrt{3}$ τοπικό ελάχιστο.

Β2. $f''(x) = (x^2 + 8x + 12) \cdot e^x$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ $ή$ $x = -6$

x	$-\infty$		-6		-2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -6]$ και $[-2, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-6, -2]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R , που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A(-6, f(-6))$ και $B(-2, f(-2))$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Β3 . Στο Β2 ερώτημα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x+2)\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x^2+6x+6)\cdot e^x = +\infty$$

Άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή είναι συνεχής στο R δεν έχει επίσης κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Β4. $f'(x) = e^x(x^2+6x+6)$, $f'(0) = 6$, $f(0) = 2$, οπότε η εξίσωσης εφαπτομένης είναι η $y = 6x + 2$

Β5. Η f είναι κυρτή στο $[-2,+\infty)$ και $0 \in [-2,+\infty)$, άρα σε αυτό το διάστημα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο Α(0, $f(0)$).
Οπότε $(x^2+4x+2)\cdot e^x \geq 6x+2$, $\gamma\iota\alpha\ x \geq -2$.

■

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1**.** Αν α,β,γ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90º) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x - \gamma^x = \beta^x$ (1) έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

Γ_2. i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με τύπο

$f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

ii) Αν κ,λ$\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$να δείξετε ότι: $1 < \dfrac{\lambda\cdot\eta\mu\kappa}{\kappa\cdot\eta\mu\lambda} < \dfrac{\pi}{2}$.

Γ_3.Αν $g(x) = f(x) + \alpha^x - \gamma^x - \beta^x$ τότε να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ για τις διάφορες τιμές των α,β,γ ,πλευρές του ορθογωνίου τρίγωνου ΑΒΓ.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

Γ_1**.** Παρατηρούμε ότι για $x = 2$ ισχύει η σχέση (1) οπότε έχουμε $\alpha^x - \gamma^x = \beta^x \Leftrightarrow \alpha^x = \beta^x + \gamma^x$, α υποτείνουσα συνεπώς α>β και α>γ οπότε έχουμε $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x \Leftrightarrow \dfrac{\beta^x}{\alpha^x} + \dfrac{\gamma^x}{\alpha^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1 = 0$. Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1$, f παραραγωγίσιμη στο R συνεπώς

$f'(x) = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^x \ln\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$ αφού

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^x > 0$, $\ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) < 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^x > 0$, $\ln\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$. Οπότε $f'(x) < 0$, $x \in R$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα έχει μοναδική ρίζα το 2.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γ_2. i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$f'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$, με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Ορίζουμε $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

με $h(0)=0$ και $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x$. Άρα για $0<x<\frac{\pi}{2}$

έχουμε $h'(x)<0$ άρα h γνησίως φθίνουσα και για

$\frac{\pi}{2}>x>0\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<h(x)<h(0)=0\Leftrightarrow h(x)<0$, άρα $f'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα

f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ομοίως $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα

f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

ii) Η f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $0<\kappa<\lambda$, οπότε έχουμε

$f(\kappa)>f(\lambda)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\kappa}{\kappa}>\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}>1}$ (1)

Επίσης $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$ και f γνησίως φθίνουσα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$f(\lambda)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}>\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}>\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\lambda}{\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}}$ (2) και για κάθε $\kappa\neq0$

ισχύει $\boxed{\eta\mu\kappa<\kappa}$ (3) .Απο (2) και (3) έχουμε $\boxed{\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}}$ (4) .

Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε τελικά $1<\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}$.

Γ_3. Ισχύει α>β και α>γ άρα :

- Αν $0<\alpha<1$ τότε :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}(\alpha^x-\beta^x-\gamma^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\alpha^x\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x\right)$$
$$=0+0\cdot1=0.$$

- Αν $\alpha>1$ τότε :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}(\alpha^x-\beta^x-\gamma^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\alpha^x\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x\right)$$
$$=+\infty.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αφού $|\eta\mu x| \le 1 \Leftrightarrow \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ και για $0<\alpha<1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ ενώ για $\alpha>1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

■

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για την οποία ισχύουν : $0<f'(x)\le 4$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0)=-f(1)$..(1). Να δείξετε ότι :

Δ_1.Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Δ_2.Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}f'(\xi)=f(1)$.

Δ_3.Για κάθε $x\in(0,1)$ισχύει ότι : $2(x-1)<f(x)<2x$.

Δ_4.Ισχύει $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|<1$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Δ_1. Ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$και αφού f συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει ότι f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Άρα για $0<1\Rightarrow f(0)<f(1)\overset{(1)}{\Rightarrow} f(0)<0$, και $f(1)>0$. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση f στο $[0,1]$ και έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,1]$ αυτό είναι μοναδικό.

Δ_2.Θεωρούμε συνάρτηση $G:[0,1]\to R$ με $G(x)=f(x)-2f(1)x$. Η G είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και

- $G(0)=f(0)$
- $G(1)=f(1)-2f(1)=-f(1)\overset{(1)}{=}f(0)$. Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$G'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2f(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(\xi)=f(1)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δ$_3$. Έστω $0<x<1$.

• Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[0,x]$ για την συνάρτηση f. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Όμως ισχύει :

$$0<f'(x_1)\le 4\Rightarrow 0<\frac{f(x)-f(0)}{x}\le 4\Leftrightarrow 0<f(x)-f(0)\le 4\Leftrightarrow$$

$$f(0)<f(x)\le f(0)+4\ (\alpha)$$

• Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[x,1]$ για την συνάρτηση f. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$. Όμως ισχύει :

$$0<f'(x_2)\le 4\Rightarrow 0<\frac{f(1)-f(x)}{1-x}\le 4\Leftrightarrow 0<f(1)-f(x)\le 4(1-x)\Leftrightarrow$$

$$f(1)-4(1-x)\le f(x)\le f(1)\ (\beta)$$

Από (α)και (β) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$f(0)+f(1)-4(1-x)<2f(x)<f(0)+f(1)+4x\Leftrightarrow 2x-2<f(x)<2x.$$

Δ$_4$. Από το Δ$_2$ ισχύει ότι :

$$f'(\xi)=2f(1)\overset{0<f'(x)\le 4}{\Rightarrow}0<2f(1)\le 4\Rightarrow 0<f(1)\le 2\overset{f(1)=-f(0)}{\Rightarrow}-2\le f(0)<0.$$

Άρα έχουμε $0<f(1)\le 2$ και $-2\le f(2)<0$

Ορίζουμε συνάρτηση $h_1(x)=f(x)-2x$, $x\in[0,1]$. Έχουμε ότι $h_1(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και h_1 δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$ από ερώτημα **Δ$_3$.**

Οπότε : $\int_0^1 h_1(x)\,dx<0\Rightarrow\int_0^1\left(f(x)-2x\right)dx<0\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1$

$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx<1}$(δ)

Ομοίως Ορίζουμε συνάρτηση $h_2(x)=f(x)-(2x-2)$, $x\in[0,1]$. Έχουμε ότι $h_2(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και h_2 δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$ από ερώτημα **Δ$_3$.**

Οπότε :

$$\int_0^1 h_2(x)\,dx>0\Rightarrow\int_0^1\left(f(x)-2x\right)dx>0\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx>\int_0^1(2x-2)\,dx=\left[x^2-2x\right]_0^1=-1$$

$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx>-1}$(ε)

Από (δ) και (ε) ισχύει ότι $-1<\int_0^1 f(x)\,dx<1\Leftrightarrow\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|<1$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΔΗΜΗΤΡΑ ΔΑΣΚΑΛΑΚΗ
ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ

 Ο Bernoullis και ο Euler υπήρξαν οι πρωτεργάτες που τελειοποίησαν τον Λογισμό σε τέτοιο βαθμό , ώστε και ένας μέσος άνθρωπος να είναι σε θέση να τον χρησιμοποιήσει.
 Η Ιστορία δείχνει πως εκείνοι οι ηγέτες οι οποίοι ενθάρρυναν την καλλιέργεια των Μαθηματικών , την κοινή πηγή όλων των Θετικών Επιστήμων , είναι επίσης αυτοί των όποιων η διακυβέρνηση υπήρξε η ποιο λαμπρή , και η δόξα τους κράτησε περισσότερο.

E.T.BELL

Η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ « Κ Υ Κ Λ Ο Σ »
ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΛΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΕΡΧΟΜΕΝΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ.