ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10/06/2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) σχολικό σελ.15 β) i)σχολικό σελ. 35 ii) σχολικό σελ. 36
Α2. Σχολικό σελ. 142
Α3. Σχολικό σελ. 135
Α4. α) Λάθος , σελ. 134
β) Λάθος, σελ .70
Α5. (γ)

ΘΕΜΑ Β

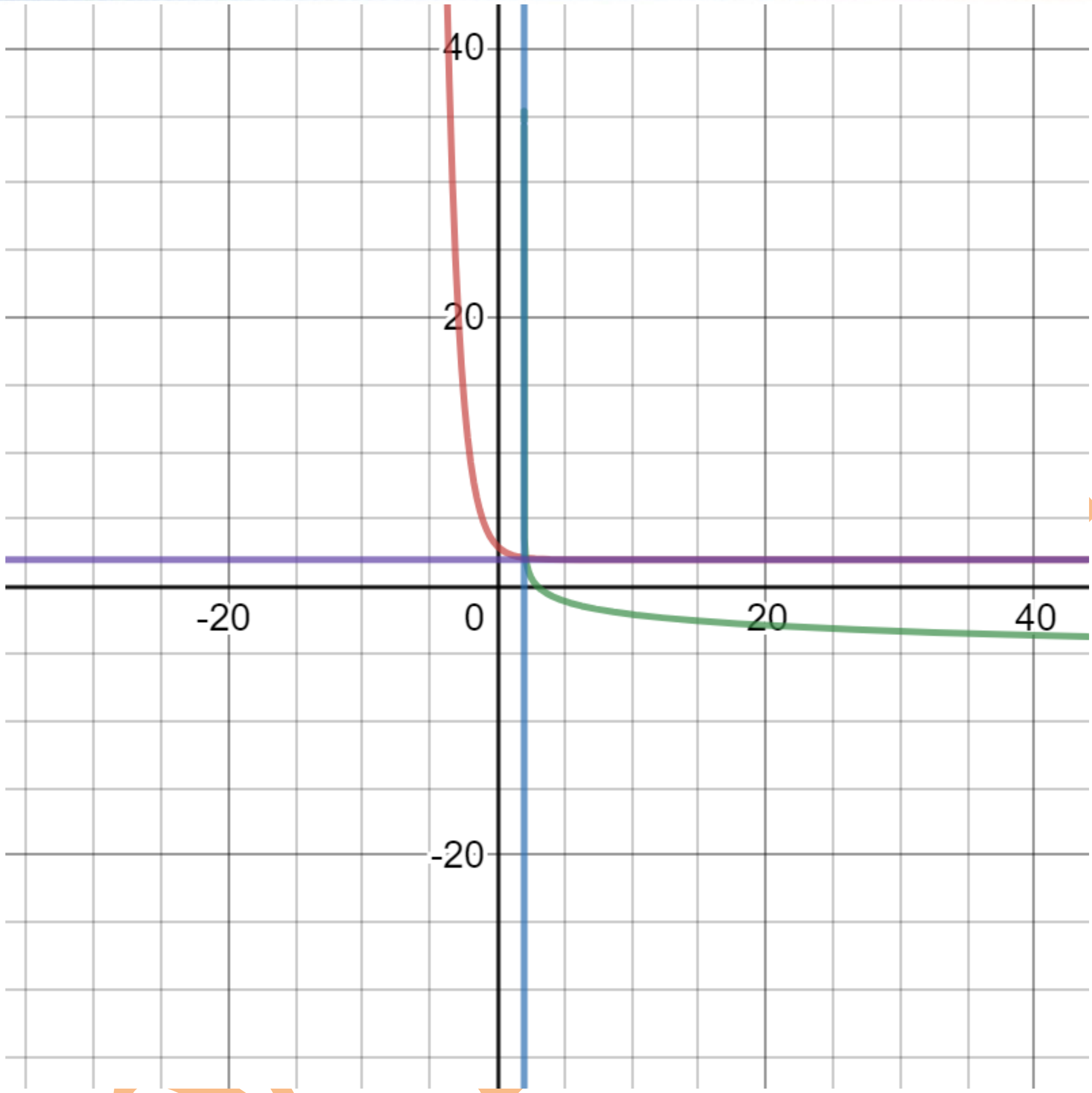
$\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + \lambda$ και οριζόντια ασύμπτωτη y=2

Β1. Αφού y=2 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ =>
$\lim_{x\to+\infty}(e^{-x} + \lambda) = 2$ ⇔ λ=2
Διότι , $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$
Οπότε, $f(x) = e^{-x} + 2$

Β2. Θέτουμε $h(x) = f(x) - x$. Η h είναι συνεχής στο [2,3].
$h(2) = f(2) - 2 = \frac{1}{e^2} > 0$, $h(3) = f(3) - 3 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$
$h(2) \cdot h(3) < 0$. Ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (2,3) τέτοιο ώστε h(ξ)=0.
Επίσης, $h'(\xi) = -(e^{-x} + 1) < 0$, h γνησίως φθίνουσα, οπότε η λύση είναι μοναδική.

Β3. Ισχύει f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Οπότε f γνησίως φθίνουσα άρα '1-1'.
Συνεπώς, αντιστρέψιμη με $f(D_f) = (2, +\infty)$, όπου
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$, y>2
Συνεπώς , για y=x έχουμε $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, x>2

Β4. $\lim_{x\to2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to2^+}(-\ln(x-2)) = +\infty$
Οι συναρτήσεις f^{-1}, f είναι κυρτές και το γράφημα είναι το παρακάτω.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f παραγωγίσιμη είναι και συνεχής , άρα $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ ⇔ 1+α=1+β ⇔ α=β (1)

F παραγωγίσιμη στο x_0=1, άρα $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ⇔ $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} = \lambda\in\mathbb{R}$ ⇔ $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1+\beta(x-1)}{x-1}$ ⇔ $2=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\beta$, θέτω u=x-1, $\lim_{x\to1} u$=0, $u\to0$

$2 = \lim_{u\to0}\frac{e^u-e^0}{u-0}+\beta$ ⇔ β=2-1 ⇔ β=1 και α=1.

Γ2. Για α=β=1 έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x\geq1 \\ e^{x-1}+1, x<1 \end{cases}$.

f παραγωγίσιμη άρα στο $(1,+\infty)$ και $(-\infty,1)$ ισχύει $f'(x) = \begin{cases} 2x, x>1 \\ e^{x-1}+1, x<1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2\,,\ \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

$f'(x)=\begin{cases} 2x, x>1 \\ 2, x=1 \\ e^{x-1}+1, x<1 \end{cases}$, f′(x)>0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα γνησίως άξουσα η f.

A=$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

B=$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $f(D_f)=\mathbb{R}$

Γ3. i) Αφού f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $(D_f)=\mathbb{R}$, έχει ακριβώς μια ρίζα επειδή $f(0)=\frac{1}{e}>0$ άρα $f((-\infty,0])=(-\infty,\frac{1}{e}]$ και $0\in(-\infty,\frac{1}{e}]$ συνεπώς η ρίζα είναι μικρότερο του 0 $x_0<0$.

ii) $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=x_0$

- $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα το x_0, αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.
- $f(x)=x_0$
  $x>x_0 \Leftrightarrow$ (f γν. αύξουσα)
  $f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow$
  $f(x)>0>x_0$, συνεπώς $f(x)-x_0>0$, οπότε η $f(x)-x_0=0$, αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4. $y=f(x), x\geq 1$ $x'(t_0)=2$ $x(t_0)=3$, $y(t_0)=10$

$E(t)=(MOK)=\frac{1}{2}(x(t)\cdot y(t))$

$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot y(t_0)+\frac{1}{2}x(t_0)\cdot y'(t_0)$ =…=28 m^2/sec

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

$f(1)=1 \Leftrightarrow$ α+β=1

$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{(x-1)(2x-2)}{x^2-2x+2}+a$

$f'(1)=-1 \Leftrightarrow$ α= -1 και β=2.

Δ2. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$

$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)-y|\,dx=\int_1^2|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2|\,dx=\cdots$

$x\geq 1$ *άρα* $x-1\geq 0$ *και* $x\geq 1 \Leftrightarrow x^2-2x+2\geq 1 \Leftrightarrow$ ln γν αύξουσα

Άρα $\ln(x^2-2x+2)\geq ln1=0$

Οπότε, $E(\Omega)=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)\,dx$

θέτω $u=x^2-2x+2 \Leftrightarrow du=2(x-1)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du=(x-1)dx, u_1=1, u_2=2$

$E(\Omega)=\frac{1}{2}\int_1^2 lnu\,du=\frac{1}{2}(2ln2-2)-\frac{1}{2}(ln1-1)=ln2-\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ3. i) $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$

Ισχύει ότι $x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1$ *άρα* $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$ *και* $\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$, *οπότε ισχύει.*

ii) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}]$ για την f

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1 \Leftrightarrow f'(\xi)\geq -1$ που ισχύει από εκφώνηση.

Δ4. Έστω σημείο Β(β,f(β)) σημείο της γραφικής της f και Γ(γ,g(γ)) σημείο της γραφικής της g.

Ισχύει $g'(x) = -3x^2 - 1 < -1, x \in \mathbb{R}$. Θα πρέπει να ισχύει $f'(\beta) = g'(\gamma) \Leftrightarrow$

$\ln(\beta^2 - 2\beta + 2) + \frac{2(\beta-1)^2}{\beta^2-2\beta+2} - 1 = -3\gamma^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\ln(\beta^2 - 2\beta + 2) + \frac{2(\beta-1)^2}{\beta^2-2\beta+2} = -3\gamma^2$

$\ln(\beta^2 - 2\beta + 2) + \frac{2(\beta-1)^2}{\beta^2-2\beta+2} \geq 0$ και $-3\gamma^2 \leq 0$

Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για β=1 και γ=0, οπότε οι εφαπτομένες στα σημεία Β(1,f(1)) και Γ(0,g(0)) είναι η $y = -x + 2$ και στις δυο περιπτώσεις, άρα είναι μοναδική κοινή εφαπτομένη .

Ομάδα Μαθηματικών Φροντιστηρίου Κύκλος