2º ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ 1º

Α. Αποδείξτε το θεώρημα Fermat.
Β. Τι ονομάζετε Αρχική ή Παράγουσα μιας συνάρτησης .
Γ. Ποια συνάρτηση ονομάζετε συνάρτηση "1 - 1"
Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος

i) Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 είναι και συνεχής σ' αυτό.

ii) Κάθε συνάρτηση "1 - 1" είναι και γνησίως μονότονη.

iii) Ισχύει ότι $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$

iv) Αν $x_0 \in D_f$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = \alpha$, $\alpha\in R$ τότε $f'(x_0) = -\alpha$

v) Για κάθε $x_0 \in D_f$ ισχύει $\left[f(x_0)\right]' = 0$.

Ε. Χαρακτηρίστε την παρακάτω πρόταση σε Αληθής ή Ψευδής και αιτιολογήστε την απάντηση σας : « Αν η συνάρτηση f δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της τότε διατηρεί σ΄αυτό σταθερό πρόσημο.»

Ενδεικτική λύση :

Α. Σχολικό Βιβλίο : Σελίδα 142
Β. Σχολικό Βιβλίο : Σελίδα 185
Γ. Σχολικό Βιβλίο : Σελίδα 33
Δ. i) Σ , ii) Λ , iii) Λ , iv) Σ , v)Σ
Ε. Ψ. Για παράδειγμα $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x\le 0 \\ -x^2-1 & , x>0 \end{cases}$ η οποία δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της όμως δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο γιατί δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

■

ΘΕΜΑ 2º

Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο A_f

γ) Να βρείτε :

i) την αντίστροφη f^{-1} της f .

ii) Να ορίσετε την $f \circ f^{-1}$

δ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης F αν ισχύει $F(x)\cdot f(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in A_f$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=4$.

Ενδεικτική λύση :

α) Έχουμε $D_f=R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων . συνεπώς έχουμε

$$f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>\frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$$ γιατί

$|x|\geq -x$ για κάθε $x\in R$.Ισχύει $f'(x)=0$ για $x=0$, οπότε έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο R.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R άρα έχουμε σύνολο τιμών : $f(R)=(A,B)$ όπου

$$A=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\overset{(-\infty+\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$$

και $B=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$. Άρα $f(R)=(0,+\infty)$ συνεπώς η f δεν έχει ρίζα δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο R.

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R είναι "1-1" άρα αντιστρέψιμη με $D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$. Θέτουμε :

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow (y-x)^2=x^2+1\Leftrightarrow y^2-2xy+x^2=x^2+1\Leftrightarrow 2xy=y^2-1$$

$$x=\frac{y^2-1}{2y},\ y>0$$

Άρα $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}}$, με $D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$.

Ορίζεται η $f\circ f^{-1}(x)$ με πεδίο ορισμού

$$D_{f\circ f^{-1}}=\{x\in D_{f^{-1}}\,/\,f^{-1}(x)\in D_f\}=\{x>0\,/\,\frac{x^2-1}{2x}\in R\}=(0,+\infty).$$

Άρα $\boxed{D_{f\circ f^{-1}}=(0,+\infty)}$ και έχει τύπο :

$$f\circ f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2+1}=\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}}\overset{(x>0)}{=}\frac{x^2-1}{2x}+\frac{x^2+1}{2x}$$

$\boxed{\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x}$.

δ) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, έχουμε ότι $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ για κάθε $x\in R$ άρα

$$F(x)=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ x\in R.$$

ε) Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου είναι :

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^4|F(x)|\,dx=\int_0^4 F(x)\,dx=\int_0^4\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln|f(x)|\right]_0^4=\ln f(4)-\ln f(0)$$

$4+\ln 17-1=3+\ln 17\ \ \tau\mu.$

■

ΘΕΜΑ 3º

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=f'(0)=0$ ώστε για κάθε $x\in D_f$ να ισχύουν :

i) $f''(x)=(1-f'(x))^2$ (1) και

ii) $f'(x)<1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2020}{f(x)}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e-1$,

ε) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Ενδεικτική λύση :

α) Έστω $g(x)=1-f'(x)$, $x\geq 0$. Έχουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, αφού ισχύει ότι $f'(x)<1, x\geq 0$ και $g'(x)=-f''(x)\Leftrightarrow f''(x)=-g(x)$, $x\geq 0$ (2), οπότε η σχέση (1) με την βοήθεια της (2) σχέσης γράφεται :

$-g(x)=g^2(x)\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}=1$, άρα $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'=(x)'$ οπότε $\dfrac{1}{g(x)}=x+c$, $c\in R$ και για $x=0$ έχουμε: $\frac{1}{g(0)}=0+c \Leftrightarrow \frac{1}{1-f'(0)}=c \Leftrightarrow c=1$, άρα

$\frac{1}{g(x)}=x+1 \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 1-f'(x)=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$ άρα

$f'(x)=(x-\ln(x+1))'$ δηλαδή $f(x)=x-\ln(x+1)+c_1,\ c_1\in R$ και για $x=0$ έχουμε ότι $f(0)=0-\ln(0+1)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$, άρα $\boxed{f(x)=x-\ln(x+1)\ ,\ x\ge 0}$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $D_f=[0,+\infty)$ ως συνάρτηση που προκύπτει από πράξεις συνέχων και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\boxed{f'(x)=(x-\ln(x+1))'=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0}$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και έχει σύνολο τιμών $[\mathrm{A},\mathrm{B})$ όπου $\mathrm{A}=f(0)=0$

και $\mathrm{B}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(x+1)) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right]=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=1-0=1$$

Οπότε $\boxed{f(D_f)=[0,+\infty)}$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ έχουμε ότι

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2020}{f(x)}=+\infty}$

δ) Ισχύει ότι $f(x)\ge 0$ στο $[0,e-1]$ άρα έχουμε :

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{e-1}|f(x)|\,dx=\int_0^{e-1}(x-\ln(x+1))\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}(x)'\ln(x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e-1}-\left[x\cdot\ln(x+1)\right]_0^{e-1}+\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e-1}-\left[x\cdot\ln(x+1)\right]_0^{e-1}+\left[x-\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-(e-1)\ln(e-1+1)-0+e-1-\ln e=\frac{(e-1)^2}{2}-e+1+e-1-1=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{2}{2}=$$

$$=\frac{e^2-2e+1-2}{2}=\frac{e^2-2e-1}{2}\quad \tau.\mu$$

ε) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο πεδίο ορισμού της και άρα "1-1" συνεπώς αντιστρέψιμη. Έστω ότι $f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ είναι παραγωγισιμη στο $x_0=0$. Επομένως έχουμε $\begin{array}{l} f^{-1}(f(x))=x \ \ , x\geq 0 \\ (f^{-1}(f(x)))'=(x)' \end{array}$

Και για $x=0$ ισχύει : $\left(f^{-1}\right)'(f(0))\cdot f'(0)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(0)\cdot 0=1\Leftrightarrow 0=1$. ΑΤΟΠΟ!!

Άρα η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

■

<u>ΘΕΜΑ 4º</u>

Έστω συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$, $x\in R$ και συνάρτηση $g(x)=\eta\mu f(x)-2x^5-2x^3-2x+2020$. Να αποδείξετε ότι :

α) Υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$,

β) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{3}$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,f(-1))$, είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x+9y-2020=0$.

δ) Για $x<0$ ισχύει ότι $f(x)-9x-6\leq 0$.

ε) Να υπολογίσετε i) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ και

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{g(x)}+5^{g(x)}+9}{5^{g(x)}+6^{g(x)}}$.

<u>Ενδεικτική λύση :</u>

α) Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πολυωνυμική με $f'(x)=\left(x^5+x^3+x\right)'=5x^4+3x^2+1>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R

και : f συνεχής στο $[-1,1]$ αφού f παραγωγίσιμη στο R

$$f(-1)=(-1)^5+(-1)^3+(-1)=-3<0$$

$$f(1)=(1)^5+(1)^3+(1)=3>0$$

Οπότε $f(-1)\cdot f(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[-1,x_0]$ και $[x_0,1]$ οπότε ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής άρα υπάρχουν τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (-1, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 1)$ τέτοια ώστε να ισχύουν

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(-1)}{x_0 + 1} = \frac{0 - (-3)}{x_0 + 1} = \frac{3}{x_0 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0 + 1}{3} \quad \kappa\alpha\iota$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{3 - 0}{1 - x_0} = \frac{3}{1 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{1 - x_0}{3}$$

οπότε έχουμε $\boxed{\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0 + 1}{3}}$(1) και $\boxed{\frac{1}{f'(x_2)} = \frac{1 - x_0}{3}}$(2)

Συνεπώς με πρόσθεση κατά μελή των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$$\boxed{\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{x_0 + 1}{3} + \frac{1 - x_0}{3} = \frac{2}{3}}$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης ης C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ έχει κλίση $\lambda = f'(-1) = 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 1 = 9$ και η δοσμένη ευθεία έχει κλίση $\lambda_\varepsilon = \frac{-A}{B} = -\frac{1}{9}$, συνεπώς $\lambda \cdot \lambda_\varepsilon = 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -1$ άρα η εφαπτομένης και η ευθεία είναι κάθετες .

δ) Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με

$f''(x) = 20x^3 + 6x = x(20x^2 + 6)$ και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 20x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(20x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

άρα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ	$\cup$

Και επειδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0)$ όποτε κάθε σημείο $x_0 \in (-\infty, 0)$ η εξίσωση της εφαπτόμενης θα βρίσκετε πάνω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής όπου θα είναι ίσες άρα ισχύει ότι :

$f(x) \le 9x + 6 \Leftrightarrow f(x) - 9x - 6 \le 0$.

ε) i) Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu f(x) - 2(x^5 + x^3 + x) + 2020}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - \frac{2f(x)}{f(x)} + \frac{2020}{f(x)}\right) = -2$$

γιατί : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \overset{(\theta\varepsilon\tau\omega\ u = f(x))}{\underset{\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ u\to+\infty\right)}{=\!=\!=}} \lim_{u\to+\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$, αφού από κριτήριο παρεμβολής

έχουμε $|\eta\mu u| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| \le \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|u|} \le \frac{\eta\mu u}{u} \le \frac{1}{|u|}$ και $\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{|u|}\right) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{|u|} = 0$

και $\lim_{x\to+\infty}\frac{2020}{f(x)}=0$.

ii) Έχουμε επίσης ότι

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)-2f(x)+2020\right)\underset{\left(\substack{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ y\to+\infty}\right)}{\overset{(\Theta\varepsilon\tau\omega\ y=f(x))}{=\!=\!=}}\lim_{y\to+\infty}\left(\eta\mu y-2y+2020\right)=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left[y\left(\frac{\eta\mu y}{y}-2+\frac{2020}{y}\right)\right]=-\infty$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{g(x)}+5^{g(x)}+9}{5^{g(x)}+6^{g(x)}}\underset{\left(\substack{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\\ t\to+\infty}\right)}{\overset{(\Theta\varepsilon\tau\omega\ g(x)=t)}{=\!=\!=}}\lim_{t\to+\infty}\frac{3^t+5^t+9}{5^t+6^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{5^t\left(\left(\frac{3}{5}\right)^t+1+\frac{9}{5^t}\right)}{6^t\left(\left(\frac{5}{6}\right)^t+1\right)}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^t\frac{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^t+1+\frac{9}{5^t}\right)}{\left(\left(\frac{5}{6}\right)^t+1\right)}\right]=0$$

Αφού $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^t=0$.

■

<u>**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**</u> **: ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ « Κ Υ Κ Λ Ο Σ »
<u>**Αρχαία γνωμικά**</u> :

- **Αεί ο θεός γεωμετρεί**. Πλάτων , 427-347 πχ. Φιλόσοφος
- **Ξυνόν γαρ αρχή και πέρας επί κύκλου περιφερείας** . Ηράκλειτος , 544-484 πχ , Ίων Φιλόσοφος.
- **Γραμμή δε μήκος απλατές** . Ευκλείδης , 4-3^{ος} αιώνας, Μαθηματικός

Η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ « Κ Υ Κ Λ Ο Σ »
ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΛΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΕΡΧΟΜΕΝΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ.