ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Δίνεται η συνάρτηση : f (x) = x .Να αποδείξετε ότι f '(x) = (x)' = 1. (Μονάδες 5)

A2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και Λ αν είναι λανθασμένες .

i)Ο αριθμός των εργαζόμενων σε μια τράπεζα είναι συνεχείς ποσοτική μεταβλητή. ii)Η μέση τιμή αποτελεί μέτρο διασποράς.

1. Ισχύει (√7) *'* = 1 .

2 √7

1. Η *f* ( *x* )=( *x*+1)3 είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Αν για μια συνάρτηση *f* ισχύουν *f '* ( *xo*)=0 για *xo* ∈( *α , β*) *, f '* ( *x* )>0 στο (*α , xo*) και *f '* ( *x*)∈0 στο ( *xo , β* ) ,τότε η *f* παρουσίαζει στο διάστημα (α,β),για *x*= *xo* μέγιστο. (Μονάδες 8)

Α3) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά : α) (*συν3x* )*'* =...........

β) ( 1 )*'* =...............

*x*

γ) (√ *x* ) *'* =.........

δ) ( *f* ( *g* ( *x*))) *'* =........ (Μονάδες 8)

A4) Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής ; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάσαμε ένα δείγμα οικογενειών στην πόλη της Κοζάνης ως προς των αριθμό των αυτοκινήτων που η κάθε μία διαθέτει .Απο τις απαντήσεις που δόθηκαν προέκυψε ο παρακάτω πίνακας :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | vi | fi | Ni | fi% | Fi% |
| 0 | κ |  |  | x |  |
| 1 |  |  |  | x+10 |  |
| 2 |  |  |  | *x*2−8x |  |
| 3 |  |  |  | 2x |  |
| 4 |  |  |  | x+20 |  |
| Σύνολο |  |  |  |  |  |

Όπου κ = lim

*x* ⟶2

*x*2−4

*x*−2

Β1)Να βρείτε το x και έπειτα να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα .(Μονάδες 12) Β2)Ποιό είναι το πλήθος των οικογενειών που έχει το πολύ 3 αυτοκίνητα; (Μονάδες 7) Β3)Ποιό είναι το ποσοστό των οικογενειών που έχει τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα ; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)Στο μάθημα των μαθηματικών δέκα μαθητές έγραψαν τους παρακάτω βαθμούς : 10 , 12+λ , 7 , 3λ + 2 , 14 , 2 + λ, 5 ,λ + 7 , 8 ,11 + 2λ

*x*2−2x

όπου λ = lim

*x* ⟶2

√*x*2+5−3

α)Να βρείτε λ. (Μονάδες 4)

β) Για λ = 3 να υπολογίσετε :

* 1. Το εύρος των βαθμών .(Μονάδες 4)
	2. Την μέση τιμή των βαθμών των μαθητών. (Μονάδες 4) iii)Την διάμεσο δ.(Μονάδες 4)

Γ2) Δίνεται η συνάρτηση *f '* ( *x*)= *x*2−2⋅*a*⋅*x* +*a*2 .

1. Έστω f ορίζεται σε ολο το ℝ .Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την *f* . (Μονάδες 5)
2. Να συγκρίνεται *f* (2023) *, f* (√7) .(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

*x*2

Δίνεται η συνάρτηση *f* ( *x* )= *x*2+1 *, x*∈ *R* .

1. Να αποδείξετε ότι *f '* ( *x*)= 2x

( *x*2+1)2

.(Μονάδες 7)

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.(Μονάδες 8)
2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο xo=1 είναι παράλληλη στην ευθεία ζ με εξίσωση : *y*= 1 *x*+5 . (Μονάδες 6)

2

1. Να βρείτε το lim *f* (−1+*h*)− *f* (−1)

*h*

.(Μονάδες 4)

*h* ⟶ 0

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) *f* ( *x*+*h*)− *f* ( *x* )=( *x*+*h*)−*x*=*h* και για *h*≠0 έχω

 *f* ( *x*+*h*) − *f* ( *x*) = *h* =1

*h h*

Επομένως lim *f* ( *x*+*h*)− *f* ( *x*)

*h*

= lim 1 =1 . Άρα ( *x* )*'* =1 .

*h* ⟶ 0 *h* ⟶ 0

Α2) : i)Λάθος ii)Λάθος iii)Λάθος iv)Λάθος v)Σωστό Α3) : α) -3ημ3x

β) −1

*x*2

γ) 1

2 √ *x*

δ) *f '* ( *g* ( *x* ))⋅*g '* ( *x* )

A4) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται συνεχής ,αν για κάθε *xo* ∈*A* ισχύει :

lim *f* ( *x* )= *f* ( *xo* ) .

*x* ⟶ *xo*

ΘΕΜΑ Β

Β1) κ = lim

*x*2−4 = lim

*x*−2

( *x*−2)⋅( *x* +2) = lim *x*+2 = 4

*x*−2

*x* ⟶2 *x* ⟶2 *x* ⟶2

Άρα κ = 2.

Πρέπει f1% +f2%+f3%+f4%+f5%=100 .Άρα *x*+ *x*+10+ *x*2−8x+2x+ *x*+20=100 .Άρα

*x*2−3x−70=0 .

*Δ*= *β*2−4αγ ,Δ=9+280 =289

*x* =−*β*+√ *Δ x* =−*β*−√ *Δ*

1 2α 2 2α

Άρα *x*1=10 *, x*2= −7

Η συχνότητα δεν μπορεί να είναι αρνητική .Οπότε η μονη δεκτή λύση είναι x=10.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | vi | fi | Ni | fi% | Fi % |
| 0 | 4 | 0,1 | 4 | 10 | 10 |
| 1 | 8 | 0,2 | 12 | 20 | 30 |
| 2 | 8 | 0,2 | 20 | 20 | 50 |
| 3 | 8 | 0,2 | 28 | 20 | 70 |
| 4 | 12 | 0,3 | 40 | 30 | 100 |
| Σύνολο | 40 | 1 |  | 100 |  |

F1%=f1% =10

F2%=F1%+f2% =10+20=30 F3%=F2%+f3%=30+20=50 F4%=F3%+f4%=50+20=70 F5%=F4%+f5%=70+30=100

Από fi % =f i 100 ,i=1,2,3,4,5. Άρα , έχω ότι :

*vi*

=

Από *f i v*

f1 = 0,1 ,f4 = 0,2 f2 = 0,2 , f5=0,3 f3 = 0,2

θα βρώ το πλήθος v.

*f* = *v*1 ⟶ *v* = *f* 1 = 0,1 ⟶ *v*=40

1 *v v*1 4

Αφού βρήκα το v μπορώ να βρώ v2,v3,ν,4,ν5

*v*2

*f* 2= *v* ⟶ *v*2 = *f* 2⋅*v* ⟶ *v* 2=0,2⋅40⟶ *v*2 =8

*v*3

*f* 3= *v* ⟶ *v*3 = *f* 3⋅*v* ⟶ *v*3=0,2⋅40⟶ *v*3=8

*v*4

*f* 4= *v* ⟶ *v* 4 = *f* 4⋅*v* ⟶ *v*4 =0,2⋅40 ⟶ *v*4=8

*v*5

*f* 5= *v* ⟶ *v*5 = *f* 5⋅*v* ⟶ *v*5=0,3⋅40 ⟶ *v*5 =12

*N* 1=*v*1=4

*N* 2= *N* 1+*v* 2=4+8=12 ⟶ *N2* =12

*N* 3= *N* 2+*v*3= 12+8 ⟶ *N* 3 = 20

*N* 4 = *N* 3+*v*4=20+8⟶ *N* 4 =28

*N* 5 = *N* 4+*v*5= 28+12 ⟶ *N* 5=40

Β2)Το πολύ 3 αυτοκίνητα σημαίνει μέχρι και 3 .Οπότε το ζητούμενο μας είναι

*ν*1+*ν*2+*ν*3+*ν*4=4+8+8+8=28 .Άρα 28 οικογένειες έχουν το πολύ 3 αυτοκίνητα.

Β3)Τουλάχιστον σημαίνει από δυο και πάνω .Οπότε αφού θέλω ποσοστό θα πάρω

*f* 3+ *f* 4+ *f* 5 =0,2+0,2+0,3=0,7 . Άρα το ποσοστό είναι 0,7⋅100=70 .Άρα το ποσοστό

είναι 70%.

Θέμα Γ

Γ1) α.Για να βρώ λ θα πρέπει να λύσω όριο.

lim

*x*2−2x

√*x*2+5 −3

*x* ( *x*−2)(√ *x*2+5+3) (√ *x*2+5−3)( √*x*2+5+3)

*x* ( *x*−2)( √*x*2+5+3)

*x*2+5−9

= lim

x →2 x →2 x →2

= lim

lim

*x* ( *x*−2)( √*x*2+5+3)

*x*2−4 =lim

*x* ( *x*−2)( √*x*2+5)+3

( *x*−2)( *x*+2) =lim

*x* (√ *x*2+5+3)

*x* +2 =

x →2 x →2 x →2

= 2⋅( 3+3) =12 =3.

2+2 4

Άρα λ=3. β.Για λ=3 :

10 , 15, 7 , 11 , 14 , 5, 5 ,10 , 8 ,17.

i) Τό εύρος είναι ίσο με :R = μεγαλύτερο βαθμό – τον μικρότερο βαθμό. Οπότε έχουμε:R= 17-5=12.

ii)Μέση τιμή βαθμών είναι : *μ*= 10+15+7+11+14+5+5+10+8+17= 102 =10,2

10 10

iii)Τώρα θα βρώ διάμεσο : *ν*=10 *άρα πλήθος αρτιο* : *Άρα δ*= *t v*/ 2+*tv* /2+1 .

2

Ταξινομώ για αρχή :5,5,7,8,10,10,11,14,15,17 .ν/2=10/2=5.

Ν/2+1=10/2+1=6

*δ* =10+11 = 21 =11,5 .

(2) 2

Γ2) i) *f '* ( *x*)= *x*2−2⋅*a*⋅*x* +*a*2 .Παρατηρώ ότι *f '* ( *x*)=( *x*−*a*)2 *, δηλαδή f '* ( *x* )≥0.

Η f ' μηδενίζεται για x=α. Αφου *f '* ( *x*)≥0 έχω ότι f γνωσίως αύξουσα σε ολο το ℝ

. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη .Οπότε η f δεν έχει ακρότατα . ii)Θα συγκρίνω τις δυο τιμές που δίνονται.

√7∈2023 *, Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα* : *f* (√7)∈ *f* (2023).

Άρα *f* (√7)∈ *f* (2023) .

ΘΕΜΑ Δ

a) *f '* ( *x*)=

( *x*2) *'* ⋅( *x*2+1) − ( *x*2)⋅( *x*2+1)

( *x*2+1)2 =

2x⋅( *x*2+1) − *x*2⋅2x

( *x*2+1)2 =

2x3+2x−2x3 2x

( *x*2+1)2 =( *x*2+1)2 .

b)

*f '* ( *x*)=0⟶ 2x =0 ⟶ 2x=0 ⟶ *x* =0. ( *x*2+1)2

x 0 +∞

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| f '(x) | - | + |
| f (x) |  |  |

Η f γνησίως φθίνουσα για *x*∈(−∞ *,* 0) και f γνησίως αύξουσα για *x*∈( 0,+∞) . Για x=0 έχω ελάχιστο με f (0) =0.

c. Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην *y*= 1 *x*+5 πρέπει ο συντελεστής

2

διευθυνσης της εφαπτομένης να είναι ίσος με 1 . Όποτε αρκεί νδο *f '* ( *x* )= 1 .

*Έχω x* =1 *f '* (1)= 2 ⋅1

= 2 = 1

2 0 2

.Άρα έδειξα *f '* ( *x* )= 1 .

0 (12+1)2 4 2 0 2

Άρα η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία.

d.Από θεωρία έχω lim *f* (−1+*h*)− *f* (−1)

*h*

= *f '* ( −1) .

*h* ⟶ 0

Άρα υπολογίζω *f '* (−1)= 2⋅(−1) = −2 =−1 .

((−1)2+1)2 4 2

**Επιμέλεια Μπλεόνα Σκεντέρι**