ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α1. *ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 31*

Α2. *α) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 65*

β) ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 86-87

Α3.

α	β	γ	δ
Λ	Λ	Σ	Σ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}\chi^3 - 3\chi^2 + 5\chi + \frac{1}{3}$, $\chi \in \mathbb{R}$

Β1. Η $f(x)$ είναι παραγωγισίμη στο σε όλο το πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική με:

$$f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - 3\chi^2 + 5\chi + \frac{1}{3}\right)' = \chi^2 - 6\chi + 5$$

B2. $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \chi^2 - 6\chi + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4*1*5}}{2*1}$

$\Rightarrow x_1 = 1,\;\; x_2 = 5$

Η μονοτονια και τα ακρότατα της $f(x)$ δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Άρα $f(\chi)$ *γνησίως αύξουσα για* $\chi \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$
Και $f(\chi)$ *γνησίως φθίνουσα για* $\chi \in (1,5)$

Με τοπικό μέγιστο $f(1) = \frac{8}{3}$, και τοπικό ελάχιστο $f(5) = -8$

B3. Εξίσωση εφαπτομένης στο $\chi_0 \; = 0$ δίνεται από τον τύπο :

$\boldsymbol{y - f(0) = f'(0)(x - 0)}$

Με $f(0) = \frac{1}{3}$ και $f'^{(0)} = 5$

Επομένως η εξίσωση με αντικατάσταση παίρνει την μορφή :

$\boldsymbol{y - \frac{1}{3} = 5x \;\Rightarrow y = 5x + \frac{1}{3}}$

B4. Από ορισμό παραγωγού συνάρτησης έχουμε ότι :

$\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = 12}$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Από το όριο που μας δίνεται $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\chi^2+6\chi-7}{2\chi-2}$ έχουμε από παραγοντοποιήσει τριωνύμου ότι $\boldsymbol{\chi^2+6\chi-7=0}$ $\varepsilon\chi\varepsilon\iota\ \rho\iota\zeta\varepsilon\varsigma$ $\boldsymbol{\chi_1=1}$ $\kappa\alpha\iota$ $\boldsymbol{\chi_2=-7}$

Και άρα έχουμε :

$$s=\lim_{\chi\to 1}\frac{(\chi-1)(\chi+7)}{2(\chi-1)}\Rightarrow\lim_{\chi\to 1}\frac{(\chi+7)}{2}=4$$

άρα $\boldsymbol{s=4}$

Γ2. Από τον τύπο του $\boldsymbol{CV}=\frac{s}{\overline{\chi}}$ έχοντας το s από το προηγούμενο ερώτημα και από την εκφώνηση έχω ότι $\boldsymbol{CV=20\%}$ αντικαθιστώντας έχω :

$\frac{20}{100}=\frac{4}{\overline{\chi}}\Rightarrow\overline{\chi}=20$ (ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΗ)

Γ3.Απο θεωρία γνωριζω ότι $\overline{\chi}=\frac{\sum\chi_i}{\nu}\Rightarrow\overline{\chi}=\frac{(22+18+20+\kappa+14+16)}{5}=\frac{90+\kappa}{5}$

Αλλά γνωρίζω ότι $\overline{\chi}=20$ και άρα $\frac{90+\kappa}{5}=20\Rightarrow\kappa=10$
(Υπάρχει ασάφεια σε περίπτωση που επαληθεύσουμε την τιμή s δεδομένου ότι το Κ = 10 δεν επαληθεύετε η αρχική τυπική απόκλιση που μας δίνεται)

Βάζοντας τις τιμές σε αύξουσα σειρά έχω 14 , 16 , 18 , 22 , 30
και λόγο ότι το ν είναι περιττός παίρνω την μεσαία τιμή άρα δ=18

Γ4. Βάση του πορίσματος σε σελ.99 (β) ερώτημα αρκεί :
$$s+10\%\cdot s=4+\frac{40}{100}=4,4\ \ \theta\alpha\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ o\ \nu\varepsilon o\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\lambda\varepsilon\sigma\tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\eta\varsigma$$

ΘΕΜΑ 4Ο

Δ1. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθ. Τρίγωνο ΑΟΒ , έχουμε:

$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \sqrt{100 - x^2}}$

Για το πεδίο ορισμού , πρέπει: $100 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 100 \Rightarrow |x| \leq 10 \Rightarrow$
$-10 \leq x \leq 10$
επειδή $\chi, y\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\varepsilon\varsigma\ O\rho\theta.\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\upsilon\ \theta\alpha\ \pi\rho\varepsilon\pi\varepsilon\iota\ \chi, y > 0\ \kappa\alpha\iota\ \chi, y < 10$

Επομένως $\boldsymbol{Af} = (\mathbf{0}, \mathbf{10})$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής ως προς χ είναι :
$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$

Για $\chi = 8$ έχουμε : $f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boldsymbol{f'(8) = -\frac{4}{3}}$

Δ3. Έχουμε :

$\lim_{x\to 6} \frac{f(x)-8}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x-6)\left(\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)\right)} =$
$\lim_{x\to 6} \frac{(100 - x^2 - 8^2)}{(x-6)\left(\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)\right)} = \lim_{x\to 6} \frac{36 - x^2}{(x-6)\left(\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)\right)} = \lim_{x\to 6} \frac{(6-x)(6+x)}{(x-6)\left(\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)\right)} =$
$\lim_{x\to 6} -\frac{(x+6)}{\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$

Δ4. Στο διάστημα (0,10) η $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$ αρα η $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{100 - x^2}}$
είναι γν. φθίνουσα και άρα για :

$$\boldsymbol{\chi_1 < \chi_3 < \chi_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΦΡΑΓΚΕΔΑΚΗΣ ΠΑΥΛΟΣ
ΚΛΑΜΠΑΤΣΕΑΣ ΧΡΙΣΤΟΣ
ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ