ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

<u>ΘΕΜΑ 1º</u>

Α.Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα :

<<Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.>>

Β. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος .

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο Α $(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f(x_0)$

β. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος .

γ. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης τη χρονική στιγμή t_0.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε κατά ανάγκη η παράγωγος της θα είναι περιττή συνάρτηση.

ε. $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{1}{x}) = +\infty$.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:</u>

Α. Σχολικό σελίδα 133

Β. Σχολικό σελίδα 73

Γ. α. Λ , β. Σ , γ. Σ , δ. Σ , ε. Λ . ■

ΘΕΜΑ 2º

Έστω δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[e,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $x^2 f''(x)\ln x + f(x) > 0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και $f(e)=1=f'(e)$.

α) Να δείξετε ότι :

i) $f(x)-\ln x \geq 0$ για κάθε $x\in[e,+\infty)$,

ii) $f\left(2023^{2024}\right) > 2024 f(2023)$,

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(e,e^2\right)$ τέτοιο ώστε $\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt = 1$,

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$,

δ) Να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot f^{-1}(x)}{-2x+\eta\mu x}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

α) i. Έχουμε από την σχέση

$$x^2 f''(x)\ln x + f(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x)\cdot\ln x + f'(x)\cdot\frac{1}{x} - f'(x)\cdot\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\ln x\right)' - \left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\cdot\ln x - \frac{f(x)}{x}\right)' > 0$$

για κάθε $x>e$. Ορίζουμε συνάρτηση $F(x)=f'(x)\cdot\ln x - \frac{f(x)}{x}$ και αφού F συνεχής στο $[e,+\infty)$ ως πράξεις συνέχων συναρτήσεων και $F'(x)>0$ έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$. Οπότε για $x>e$ έχουμε

$$F(x) > F(e) \Rightarrow f'(x)\cdot\ln x - \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{1}{e} > 0 \underset{x\in[e,+\infty)}{\overset{\ln x>0}{\Rightarrow}} \frac{f'(x)\cdot\ln x - \frac{f(x)}{x}}{\ln^2 x} > 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)' > 0$$

Ορίζουμε συνάρτηση $G(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$ και αφού $G'(x)>0$ για κάθε $x\in[e,+\infty)$ έχουμε ότι G γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$, άρα για κάθε

$x>e \Rightarrow G(x) > G(e) \Rightarrow \frac{f(x)}{\ln x} > \frac{f(e)}{\ln e} = 1 \Rightarrow f(x) > \ln x$. Και για $x=e$ έχουμε

$G(e)=\frac{f(e)}{\ln e}=1$, οπότε για κάθε $x\in[e,+\infty)$ ισχύει $f(x)-\ln x\geq 0$.

ii. Ισχύει ότι

$$2023^{2024} > 2023 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G\left(2023^{2024}\right) > G(2023) \Leftrightarrow \frac{f\left(2023^{2024}\right)}{\ln 2023^{2024}} > \frac{f(2023)}{\ln 2023} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(2023^{2024}\right)}{2024\ln 2023} > \frac{f(2023)}{\ln 2023} \Leftrightarrow \frac{f\left(2023^{2024}\right)}{2024} > \frac{f(2023)}{1} \Leftrightarrow f\left(2023^{2024}\right) > 2024 f(2023).$$

β) Ορίζουμε συνάρτηση $H:\left[e,e^2\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο $H(x)=\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt-1$. Έχουμε ότι η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνέχων συναρτήσεων στο $\left[e,e^2\right]$, άρα και η H είναι συνεχής στο $\left[e,e^2\right]$ ως παραγωγίσιμη .

Οπότε έχουμε:

$$H(e)=\int_e^e \frac{f(t)}{t}dt-1=-1<0$$

$$H\left(e^2\right)=\int_e^{e^2} \frac{f(t)}{t}dt-1>0$$

Διότι :

$$f(t)\geq \ln t \underset{t\in\left[e,e^2\right]}{\overset{t>0}{\Rightarrow}} \frac{f(t)}{t}\geq \frac{\ln t}{t} \Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{f(t)}{t}dt \geq \int_e^{e^2}\frac{\ln t}{t}dt=\left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_e^{e^2}=\frac{\ln^2 e^2-\ln^2 e}{2}=\frac{3}{2}>0$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(e,e^2\right)$ τ.ω $\int_e^{x_0}\frac{f(t)}{t}dt=1$.

γ) Για $x>e$ έχουμε $f'(x)\cdot\ln x-\frac{f(x)}{x}>0 \underset{x>e}{\overset{\ln x>0}{\Rightarrow}} f'(x)>\frac{f(x)}{x\cdot\ln x}>0$ αφού $f(x)\geq \ln x>0$. Άρα η $f'(x)>0$ στο $(e,+\infty)$ και συνεχής στο e, άρα η $f\uparrow \sigma\tau o[e,+\infty)$.

δ) Αφού $f\uparrow \sigma\tau o[e,+\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη με f^{-1} επίσης γνησίως αύξουσα στο $f\left(D_f\right)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$, (Διότι $f(x)\geq\ln x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$).Συνεπώς προκύπτει ότι $f^{-1}:[1,+\infty)\to[e,+\infty)$ και $f^{-1}\uparrow \sigma\tau o[1,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$.

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot f^{-1}(x)}{-2x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{-2+\frac{\eta\mu x}{x}}=-\infty$.

Γιατί $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow -2-\frac{1}{x}\le -2+\frac{\eta\mu x}{x}\le -2+\frac{1}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x}\right)=-2$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=-2$. ■

ΘΕΜΑ 3º

Έστω οι συναρτήσεις f,g τέτοιες ώστε : η f να είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f'(\beta)=f(\beta)\cdot f'(\alpha)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση g συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με $g(0)=5$ και $g(3)=5$ τότε δείξτε ότι :

α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)f''(\xi)>0$,

β) i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $\frac{g(x_0)}{5}=x_0$.

ii) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,3)$ τέτοια ώστε:

$(3-x_0)g'(x_1)\cdot g'(x_2)-25(1-x_0)=0$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

α) Έστω συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ με $x\in[\alpha,\beta]$ τότε :

- Η h είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$
- Η h είναι παραγωγισιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α,β)
- Και $h(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=h(\beta)$ αφού

$$f(\alpha)\cdot f'(\beta)=f(\beta)\cdot f'(\alpha)\overset{f'(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\frac{f(\alpha)f'(\beta)}{f'(\alpha)f'(\beta)}=\frac{f(\beta)f'(\alpha)}{f'(\alpha)f'(\beta)}\Leftrightarrow$$
$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Επόμενος από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)f'(\xi)-f(\xi)f''(\xi)}{\left[f'(\xi)\right]^2}=0 \Leftrightarrow \left[f'(\xi)\right]^2-f(\xi)f''(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow f(\xi)f''(\xi)=\left[f'(\xi)\right]^2>0$$

αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Άρα $f(\xi)f''(\xi)>0$.

β) i) Έστω συνάρτηση $G(x)=g(x)-5x$, $x\in[0,3]$. Η G είναι :

- συνεχής στο $[0,3]$ και
- $G(0)=g(0)-5\cdot 0=5>0$, $G(3)=g(3)-15=-15<0$. Άρα $G(0)\cdot G(3)<0$.

Επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε

$$G(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)-5x_0=0 \Leftrightarrow \frac{g(x_0)}{5}=x_0.$$

ii) Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,3]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,x_0)$ και $(x_0 3)$. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα δηλαδή υπάρχουν τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,x_0)$, $x_2\in(x_0,3)$ τ.ω

$$g'(x_1)=\frac{g(x_0)-g(0)}{x_0}=\frac{g(x_0)-5}{x_0} \text{ και } g'(x_2)=\frac{g(3)-g(x_0)}{3-x_0}=\frac{-g(x_0)}{3-x_0}$$

Άρα :

$$g'(x_1)\cdot g'(x_2)=\frac{\left(g(x_0)-5\right)\left(-g(x_0)\right)}{x_0(3-x_0)}=\frac{(5x_0-5)(-5x_0)}{x_0(3-x_0)}\Leftrightarrow$$

$$(3-x_0)g'(x_1)g'(x_2)=25(1-x_0)$$

■

<u>ΘΕΜΑ 4º</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι κοίλη στο $\left[e^2,+\infty\right)$ και ικανοποιεί την σχέση $x\cdot f(x)=\ln\left(x^e\cdot e^x\right)$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα,

β) Να αποδείξετε ότι κάθε $x>0$ ισχύει $e^x\geq x^e$,

γ) Να αποδείξετε ότι $e^4(1-\ln x)\left(x-e^2\right)+2<f(x)<2-\left(x-e^2\right)x^2$ για κάθε

$x > e^2$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

α) Ε χουμε $x\cdot f(x)=\ln\left(x^e\cdot e^x\right)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x^e+\ln e^x}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e\ln x+x}{x}$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε

$$f'(x)=\frac{e\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\frac{e-e\ln x}{x^2}.$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e-e\ln x=0\Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow x<e$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow x>e$

Στη θέση $x_0=e$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(e)=2$.

β) Από ερώτημα το α) ισχύει ότι :

$$f(x)\le 2\Leftrightarrow \frac{e\ln x+x}{x}\le 2\Leftrightarrow e\ln x\le x\Leftrightarrow \ln x^e\le \ln e^x\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} x^e\le e^x.$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και συνεχής στο $\left[e^2,x\right]$ και παραγωγισιμη στο $\left(e^2,x\right)$, $x\in\left(e^2,+\infty\right)$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(e^2,x\right)$ τέτοιο ώστε από Θεώρημα Μέσης Τιμής να ισχύει :

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f\left(e^2\right)}{x-e^2}$$ όμως

$$\xi\in\left(e^2,x\right)\Leftrightarrow e^2<\xi<x\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'\left(e^2\right)>f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow$$

$$\frac{e-e\ln e^2}{e^4}>\frac{f(x)-f\left(e^2\right)}{x-e^2}>\frac{e-e\ln x}{x^2}\Leftrightarrow -\frac{1}{e^3}>\frac{f(x)-2}{x-e^2}>\frac{e-e\ln x}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^4(1-\ln x)\left(x-e^2\right)+2<f(x)<2-\left(x-e^2\right)x^2.$$

δ) Επειδή $1\le x\le e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(1)\le f(x)\le f(e) \Leftrightarrow 1\le f(x)\le 2$. Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$ Άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{e\ln x+x}{x}dx=e\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx+\int_1^e 1dx=e\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e+e-1=$$

$$=e\left(\frac{1}{2}-0\right)+e-1=\frac{3e-2}{2}\ \tau\mu.$$

■

Ο **Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή** (Βερολίνο, 13 Σεπτεμβρίου 1873 - Μόναχο, 2 Φεβρουαρίου 1950) ήταν κορυφαίος σύγχρονος Έλληνας μαθηματικός που διακρίθηκε σε παγκόσμιο επίπεδο.
Το επιστημονικό έργο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή επεκτείνεται σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Αρχαιολογίας. Είχε σημαντικότατη συνεισφορά ιδιαίτερα στους τομείς της πραγματικής ανάλυσης, συναρτησιακής ανάλυσης και θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης.
Ιδιαίτερη ήταν η σχέση που συνέδεε τον Καραθεοδωρή με τον Άλμπερτ Αϊνστάιν. Οι δύο άνδρες γνωρίσθηκαν το 1915 διατήρησαν μια επιστημονική σχέση, στηριγμένη στην αλληλοεκτίμηση και σεβασμό. Τότε άρχισε και το ενδιαφέρον του Καραθεοδωρή για την Θεωρία της Σχετικότητας.

Ο **Κωνσταντίνος Δασκαλάκης** , μαθηματικός του MIT, αν έμενε στην Ελλάδα, σίγουρα δεν θα ήταν καθηγητής σε ηλικία 30 χρονών. Μπορεί και να μην έλυνε ποτέ τον «γρίφο του Νας».

Ο **Δημήτρης Χριστοδούλου**, μεγάλος Ελληνας μαθηματικός, φυσικός και διανοητής των επιστημονικών ιδεών ο οποίος σε ηλικία 21 ετών ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Του απονεμήθηκε το βραβείο «Σο Πράιζ» της Ασίας στα Μαθηματικά, το οποίο είναι αντίστοιχο του βραβείου Νόμπελ, αφού δεν είχε προβλεφθεί βράβευση Μαθηματικών.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ !

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ