ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ′ ΕΠΑΛ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι : $(c)' = 0$.

Α2. Τι ονομάζεται διάμεσος δείγματος ν παρατηρήσεων τοποθετημένων σε αύξουσα σειρά;

Α3. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα και τι ιδιότητες έχει;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες :

i) Αν $C_A > C_B$ τότε το δείγμα Α είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα Β.

ii) Η μέση τιμή και η διάμεσος είναι μέτρα διασποράς.

iii) Η διακύμανση εκφράζεται σε ίδιες μονάδες μέτρησης με εκείνες των τιμών x_i της μεταβλητής Χ.

iv) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

v) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

Α5. Να συμπληρώσετε τα κενά :

i) $(f(x) \cdot g(x))' =$

ii) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

iii) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

iv) $(\sqrt{x})' =$

ΘΕΜΑ Β

Οι παρατηρήσεις α^2,15,21,6α,α,6,12 έχουν μέση τιμή $\bar{x}=12$.

Β1. Να βρείτε το α.

Β2. Για α=3 , να βρείτε :

i) το εύρος R και τη διάμεσο δ

ii) την τυπική απόκλιση

Β3. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια .

ΘΕΜΑ Γ

Οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, .., x_\nu$ ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή. Το 16% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 12 , ενώ το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 6.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=10$ και s=2

Γ2. Αν 320 παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 8,να βρείτε πόσες παρατηρήσεις βρίσκονται μεταξύ του 10 και 14.

Γ3. Αν $f(x)= x^3 - R\cdot x + \delta$, όπου R το εύρος και δ η διάμεσος των παραπάνω παρατηρήσεων :

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, $f(1)$) .

ii) Αν οι τετμημένες x_i , με i=1,2,…,ν των σημείων της εφαπτομένης είναι οι παραπάνω παρατηρήσεις , να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων της .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + αx^2 + βx + 10$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για
x= -2 είναι 3 και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(-2,12) ,να δείξετε ότι
α= -6 και β= -9.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ το κ είναι το τοπικό ελάχιστο της f το λ είναι το τοπικό μέγιστο της f και $μ=\frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}-2}$.

i) Να βρείτε τα κ , λ, μ .

ii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x_i	$ν_i$	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
1				
2	κ		λ	
3				75
4	μ			80
5				
Σύνολο				

iii) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

iv) Να βρείτε τη διασπορά των παρατηρήσεων .

Δίνεται $s^2 = \frac{1}{ν}\left\{\sum x_i^2 ν_i - \frac{\left(\sum x_i ν_i\right)^2}{ν}\right\}$

v) Να εξετάστε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.65

Α4.) i) Λ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Λ

Α5. i) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

ii) $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

iii) $-\frac{1}{x^2}$

iv) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$\bar{x}=12 \Leftrightarrow \frac{α^2+15+21+6α+α+6+12}{7}=12 \Leftrightarrow α^2 + 7α+54=84 \Leftrightarrow α^2+7α-30=0 \Leftrightarrow α= 3$ ή $α= -10$

Β2. Για α=3 : 9,15,21,18,3,6,12

i) R=21-3=18

ταξινομώντας τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά : 3,6,9,12,15,18,21

προκύπτει ότι $δ = t_4 = 12$

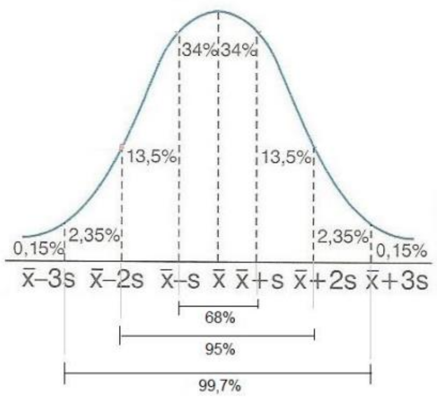
ii) $s^2= \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν}(t_i - \bar{x})^2$

$= \frac{(3-12)^2+(6-12)^2+(9-12)^2+(12-12)^2+(15-12)^2+(18-12)^2+(21-12)^2}{7} = \frac{252}{7} = 36$

Άρα s = $\sqrt{s^2} = \sqrt{36} = 6$

Β3. CV = $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{6}{12}$ = 50% >10% οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Γ
Αφού οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή ισχύει:



Γ1. Το 16% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 12 άρα $\bar{x}$ + s = 12 (1)
Το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 6 άρα $\bar{x}$ - 2s = 6 (2)
Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) προκύπτει ότι s=2 και $\bar{x}$=10

Γ2. 320 παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 8 άρα αν ν το σύνολο των παρατηρήσεων προκύπτει : $\frac{16}{100} \cdot \nu = 320 \Leftrightarrow \nu = 2000$.
Μεταξύ του 10 και του 14 βρίσκεται το 47,5% των παρατηρήσεων δηλαδή
$$\frac{47.5}{100} \cdot 2000 = 950$$

Γ3. i) Στην κανονική κατανομή ισχύει ότι δ=$\bar{x}$ και R≈6s άρα δ=10 και R=6·2=12.
Οπότε $f(x)=x^3-12x+10$, με $f'(x)=3x^2-12$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο Α(1, $f(1)$) είναι ε: y=λx+κ ,όπου λ= $f'(1)$=-9 άρα προκύπτει y=-9x+κ.
Όμως $f(1)$=-9+κ ⇔ -1=-9+κ ⇔ κ=8 ,άρα ε: y=-9x+8 .
ii) Για τις τεταγμένες ισχύει : $y_i=-9x_i+8$ άρα $\bar{y}=-9\bar{x}+8=-82$ και $s_y=|-9|s_x=9\cdot 2=18$
Οπότε $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41}$.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 10$ με $A_f = \mathbb{R}$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = -3x^2 + 2\alpha x + \beta$.
Ο ρυθμός μεταβολής της f για x=-2 είναι 3 άρα $f'(-2)=3$ ⇔ -12-4α+β=3 ⇔-4α+β=15 , (1).
Επιπλέον αφού η C_f διέρχεται από το Α(-2,12) τότε $f(-2)=12$ ⇔4α-2β=-6 ,(2) .
Από (1),(2) προκύπτει ότι α= -6 και β= -9.
Δ2. Προκύπτει ότι $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x + 10$ με $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2-12x-9=0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -3$

x	$-\infty$	-3		-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘
		τ.ε.		τ.μ.	

Αρά η f γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$, $[-1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-3,-1]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -3 το $f(-3)=10$ και τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=14$.
Δ3. i) $\kappa = f(-3)=10$ και $\lambda = f(-1)=14$

$$\mu = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}-2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{x^2-9}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x-3)(x+3)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 3}(\sqrt{x^2-5}+2) = 2$$

ii) $N_1 = N_2 - \nu_2 = 14-10=4$ αρα και $\nu_1=4$
$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 80-75= 5\%$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_4}{f_4} = \frac{2}{0{,}05} = 40$ $\quad f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{4}{40} = 0{,}1$ $\quad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{10}{40} = 0{,}25$

Άρα $F_1\%=10$ και $F_2\%=35$
$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 75-35= 40\%$, αντίστοιχα $f_5\% =20$
$\nu_3 = f_3 \cdot \nu = 0{,}4 \cdot 40 =16$ οπότε $\nu_5 = 40-32=8$
$N_3 = N_2+\nu_3=14+16=30$, αντίστοιχα $N_4=32$ και $N_5 = \nu = 40$

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	$x_i^2\nu_i$
1	4	10	4	10	4	4
2	10	25	14	35	20	40
3	16	40	30	75	48	144
4	2	5	32	80	8	32
5	8	20	40	100	40	200
Σύνολο	40	100	-	-	120	420

iii) $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = \frac{120}{40} = 3$, $\nu=40$, άρα $\delta = \frac{t_{20}+t_{21}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$

iv) $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i^2\nu_i - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i\nu_i}{\nu} \right\} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2\nu_i}{20} - (\bar{x})^2 = \frac{420}{40} - 3^2 = \frac{3}{2}$

v) $s=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} > 0{,}1=10\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΦΑΡΣΑΡΗ ΡΕΝΙΑ
ΤΣΙΧΛΑΚΗΣ ΣΠΥΡΟΣ