

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.161

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

Β1 . Η  $f(x)$  παραγωγίσιμη με  $f'(x)=3x^2+2ax+9$  και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1 , από Θεώρημα Fermat

$$f'(1)=0.$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = -12$$

$$\Leftrightarrow a = -6$$

Β2. Για  $a=-6$  προκύπτει  $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$  με  $f'(x)=3x^2-12x+9$ .

Έστω  $f'(x)=0$ .

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				
		Τ.μ.	Τ.ε.	

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $\Delta_1 = (-\infty, 1]$  ,  $\Delta_2 = (1, 3]$  ,  $\Delta_3 = (3, +\infty)$  .

$$f(\Delta 1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$$

$$f(\Delta 2) = (\lim_{x \rightarrow 3} f(x), f(1)] = (-3, 1]$$

$$f(\Delta 3) = (\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) = (-3, +\infty)$$

$0 \in f(\Delta 1)$  και  $f$ : γν. αύξουσα και συνεχής στο  $(-\infty, 1]$ , άρα υπάρχει μοναδική ρίζα  $x_1 \in (-\infty, 1]$  τ.ω:  $f(x_1) = 0$

Θ.δ.ο το  $x_1 > 0$ :

Έστω ότι  $x_1 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(0) \Rightarrow f(x_1) \leq -3$ , άτοπο διότι  $f(x_1) = 0$ . Άρα  $x_1 > 0$ .

Επομένως η  $f$  έχει μια θετική πραγματική ρίζα στο  $(-\infty, 1]$ .

$0 \in f(\Delta 2)$  και  $f$ : γν. φθίνουσα και συνεχής στο  $(1, 3]$ , άρα υπάρχει μοναδική ρίζα  $x_2 \in (1, 3]$  τ.ω:  $f(x_2) = 0$

$0 \in f(\Delta 3)$  και  $f$ : γν. αύξουσα και συνεχής στο  $(3, +\infty]$ , άρα υπάρχει μοναδική ρίζα  $x_3 \in (3, +\infty]$  τ.ω:  $f(x_3) = 0$

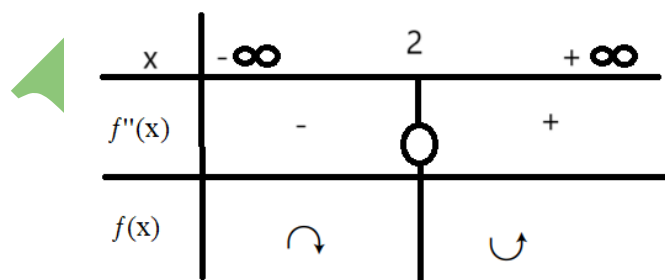
Άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Η  $f'$  παραγωγίσιμη με  $f''(x) = 6x - 12$

Έστω  $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$



Αφού  $f''(x) < 0$  τότε η  $f$  κοίλη στο  $(-\infty, 2]$  και  $f''(x) > 0$ , η  $f$  κυρτή στο  $[2, +\infty)$

Με σημείο καμπής το  $(2, -1)$

B4. Η εφαπτομένη της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(\xi, f(\xi))$  δίνεται από τον τύπο

$$y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $B(\xi, g(\xi))$  δίνεται από τον τύπο

$$y-g(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) \quad \text{όπου } g(\xi) = f(\xi) + \xi \text{ και } g'(\xi) = f'(\xi) + 1, \text{ άρα προκύπτει ότι}$$

$$\Leftrightarrow y - (f(\xi) + \xi) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi)$$

$$\Leftrightarrow y - f(\xi) - \xi = f'(\xi)(x - \xi) + (x - \xi)$$

$$\Leftrightarrow y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + (x - \xi) + \xi \quad (2)$$

Από (1),(2) προκύπτει ότι :

$$f'(\xi)(x - \xi) = f'(\xi)(x - \xi) + (x - \xi) + \xi$$

$$\Leftrightarrow x - \xi + \xi = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_g$  τέμνονται στον άξονα  $y'y$ .

## ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0 + 0} = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\text{άρα: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Άρα  $f$ : συνεχής στο  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu \chi}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (2x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \right] = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$

$$\Gamma 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu \chi = 0$$

Κρ. Παρεμβολής:  $|e^x \eta \mu \chi| \leq |e^x| \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu \chi \leq e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0, \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu \chi = 0$$

Άρα η  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Τότε  $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Τότε  $\beta = \frac{1}{2}$

Άρα η  $y = x + \frac{1}{2}$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

$$\Gamma 3. f(x) = x + \frac{1}{2}, x \in (-\pi, 0)$$

$$\text{Θέτουμε : } g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, x \in (-\pi, 0)$$

Η g είναι συνεχής στο  $[-\pi, 0]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Άρα:  $g(-\pi)g(0) < 0$ , από Θ. Bolzano  $(-\pi, 0)$ , δηλ. η  $f(x) = x + \frac{1}{2}$  έχει μία τουλ. Ρίζα στο  $(-\pi, 0)$ .

$$\Gamma 4. \text{ Έχουμε } y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$\text{με } y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Για } t=t_0 : y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0)$$

$$\Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0)$$

$$\Leftrightarrow 4x(t_0) + 1 = 4x(t_0) \text{ , Αδύνατο}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0 \geq 0$ , τέτοια ώστε  $y'(t_0) = x'(t_0)$ .

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι:  $xf(x) = 2F(x)\ln x$ ,  $x > 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2F(x)\ln x}{x} \text{ , (1)}$$

Έχουμε  $g(x) = \frac{F(x)}{x \ln x}$ ,  $x > 0$

Η g παραγωγίσμη στο  $(0, +\infty)$  ως ηλίκο παραγωγίσμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x \ln x - F(x) \cdot (x \ln x)'}{(x \ln x)^2}$$

$$\text{Έστω } \varphi(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$$

$$\text{με } \varphi'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x$$

$$\text{Άρα } g'(x) = \frac{f(x) \cdot x \ln x - x \ln x \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot F(x)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x^{\ln x} (f(x) - \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot F(x))}{(x^{\ln x})^2} = 0, \text{ από (1) άρα } g(x) = c \text{ για } x > 0.$$

Δ2) i) Αφού η εφαπτομένη της  $f$  είναι παράλληλη στην  $y = 2x$  στο  $(1, f(1))$ , τότε  $f'(1) = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = f'(1) = 2$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \right)$$

ii) Για κάθε  $x > 0$ :  $xf(x) = 2F(x)\ln x$

$$\text{Για } x = 1: 1f(1) = 2F(1)\ln 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + xf'(x)}{2\ln x} = \frac{f(1) + 1f'(1)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow F(1) = 1$$

Επίσης, για κάθε  $x > 0$ :  $g(x) = c$ , άρα  $\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$

$$\text{Για } x = 1: \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Rightarrow F(1) = c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως, για κάθε  $x > 0$ :  $g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$

$$\Delta 3. F'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot \frac{2}{x} \ln x, x > 0$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$x$	0	1	
$F'$		-	+
$F$			

Άρα προκύπτει ολικό ελάχιστο για  $x=1$ , το  $F(1)=1$ , με  $F(x) \geq 1$ , για κάθε  $x > 1$ , όπου ισχύει η ισότητα μόνο για  $x=1$ .

$$\text{Άρα } F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0, (2)$$

Για  $x=1$  ισχύει η (2)

$$\text{Για } 0 < x < 1 : 0 < x^2 < x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

Άρα προκύπτει ότι  $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$

Για  $x > 1 : x^2 > x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ , οπότε ανίστοιχα προκύπτει

$$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$$

Άρα η (2) έχει μοναδική λύση την  $x=1$ .

$$\Delta 4. \text{ Έχουμε } E = \int_1^e |F(x)| dx$$

$$\text{Επίσης } 1 \leq x \leq e \Leftrightarrow F(1) \leq F(x) \leq F(e) \Leftrightarrow 1 \leq F(x) \leq e$$

$$\text{Επομένως: } E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx$$

Γνωρίζουμε ότι:  $e^x \geq x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η οποία για  $x = \ln^2 x$  γίνεται:

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx =$$

$$[x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x 2 \ln x \frac{1}{x} dx + [x]_1^e = e - \left\{ [2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2x \frac{1}{x} dx \right\} + e - 1 = e - 2e + [2x]_1^e + e - 1 = e - 2e + 2e - 2 + e - 1 = 2e - 3$$

$$\text{Επομένως: } E > 2e - 3$$