ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ln|x|$, x$\in$ R^* είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, x$\in$ R^* .

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Α3. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Α4. Πότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

δ. Αν f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β] με $f(x) \geq 0$, για κάθε x$\in$ $[\alpha, \beta]$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό , τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ \leq 0$

ε. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

Α1. Σχολ. Βιβλίο Σελ. 235 (Απόδειξη)

Α2. Σχολ. Βιβλίο Σελ. 192 (Ορισμός)
Α3. Σχολ. Βιβλίο Σελ. 222 (Ορισμός)
Α4. Σχολ. Βιβλίο Σελ. 280 (Ορισμός)
Α5. α.Σ β.Σ γ.Σ δ.Λ ε.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν α,β,γ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90º) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x - \gamma^x = \beta^x$ (1) έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

Β2. i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

ii) Αν κ,λ$\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι: $1 < \frac{\lambda \cdot \eta\mu\kappa}{\kappa \cdot \eta\mu\lambda} < \frac{\pi}{2}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Α. Παρατηρούμε ότι για $x=2$ ισχύει η σχέση (1) οπότε έχουμε $\alpha^x - \gamma^x = \beta^x \Leftrightarrow \alpha^x = \beta^x + \gamma^x$, α υποτείνουσα συνεπώς α>β και α>γ οπότε έχουμε $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x \Leftrightarrow \frac{\beta^x}{\alpha^x} + \frac{\gamma^x}{\alpha^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1 = 0$. Ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1$, f παραραγωγίσιμη στο R συνεπώς $f'(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$ αφού $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x > 0$, $\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < 0$ και $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x > 0$, $\ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < 0$. Οπότε $f'(x) < 0$, $x \in R$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα έχει μοναδική ρίζα το 2.

Β. i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$, με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ορίζουμε $h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ με $h(0) = 0$ και $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$. Άρα για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ έχουμε $h'(x) < 0$ άρα h γνησίως φθίνουσα και για $\frac{\pi}{2} > x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow h(x) < 0$, άρα $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα

f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ομοίως $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

ii) Η f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $0<\kappa<\lambda$, οπότε έχουμε

$f(\kappa)>f(\lambda)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\kappa}{\kappa}>\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\Leftrightarrow\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}>1$ (1)

Επίσης $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$ και f γνησίως φθίνουσα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$f(\lambda)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}>\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}>\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\frac{\lambda}{\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}$ (2) και για κάθε $\kappa\neq 0$ ισχύει $\eta\mu\kappa<\kappa$ (3) .Από (2) και (3) έχουμε $\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}$ (4) .

Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε τελικά $1<\frac{\lambda\eta\mu\kappa}{\kappa\eta\mu\lambda}<\frac{\pi}{2}$.

■

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^4+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε ένα φυσικό αριθμό κ ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\kappa,\kappa+1)$.

Γ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $x=x_0$, x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,1)$ να δείξετε ότι $0<E<3$.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x^4}\cdot e^{2x}-e+x^4=1-2x$.

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{f(x)+1}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f(0)=0+0-1=-1<0$ και $f(1)=1+2-1=2>0$, άρα αφού f συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)\cdot f(1)<0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ δηλαδή η f

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Άρα ο φυσικός αριθμός είναι ο $\kappa=0$.

β) Έχουμε f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+2>0$ άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $E(\Omega)=\int_0^{x_0}|f(x)|dx$, όμως $0\le x\le x_0$ και $f\uparrow$ άρα $f(0)\le f(x)\le f(x_0)$, άρα $f(x)\le 0$, οπότε έχουμε :

$$E(\Omega)=\int_0^{x_0}|f(x)|dx=-\int_0^{x_0}f(x)dx=-\int_0^{x_0}\left(x^4+2x-1\right)dx=$$
$$=-\left[\frac{x^5}{5}+x^2-x\right]_0^{x_0}=-\left(\frac{x_0^5}{5}+x_0^2-x_0-0\right)=-\frac{x_0}{5}\left(x_0^4+5x_0-5\right)$$

Όμως επειδή $f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^4+2x_0-1=0\Leftrightarrow x_0^4=-2x_0+1$. έχουμε

$$E(\Omega)=-\frac{x_0}{55}\left(-2x_0+5x_0+1-16\right)=-\frac{x_0}{5}\left(3x_0-15\right).$$ Αλλά

$0<x_0<1\Leftrightarrow 0<3x_0<3\Leftrightarrow -15<3x_0-15<-12\Leftrightarrow 12<-(3x_0-15)<15$. και $0<\frac{x_0}{5}<\frac{1}{5}$, άρα $0<-\frac{x_0}{5}(3x_0-15)<3\Leftrightarrow 0<E(\Omega)<3$.

γ) Έχουμε $e^{x^4}\cdot e^{2x}-e+x^4=1-2x\Leftrightarrow e^{x^4+2x}+x^4+2x=e+1$. Ορίζουμε συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ και παρατηρούμε ότι θέλουμε να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g\left(x^4+2x\right)=g(1)$ ....(1)

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως συνάρτηση που προκύπτει από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων , συνεπώς $g'(x)=e^x+1>0$ άρα $g\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, g "1–1" συνάρτηση , οπότε από την (1) σχέση έχουμε : $x^4+2x=1\Leftrightarrow f(x)=0$. Άρα η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=4x^3+2=0\Leftrightarrow x^3=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

ΟΕ: $f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1<0$

$$\left.\begin{aligned}A&=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\ B&=f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\left(\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]\right)=\left[-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1,+\infty\right)$$ και

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ B = f\left(-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} - 1\end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\left[-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty\right)\right) = \left[-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} - 1, +\infty\right)$$

Επειδή το $x=0$ ανήκει και στο δυο διαστήματα τιμών και από μονοτονία σ' αυτά η εξίσωσης $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες.

δ) Έχουμε: $x^{f(x)+1} = x^{x^4+2x-1+1} = e^{\ln\left(x^4+2x\right)}$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{f(x)+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln\left(x^4+2x\right)}$

Θέτουμε $u = \ln\left(x^4+2x\right)$ και $u_1 = x^4+2x$ οπότε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} u_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x\right) = +\infty$, άρα καθώς $x\to-\infty$ έχουμε $u_1\to+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{u_1\to+\infty} \ln(u_1) = +\infty$, άρα καθώς $u_1\to+\infty$ έχουμε $u\to+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{(f(x)+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln\left(x^4+2x\right)} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

■

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για την οποία ισχύουν: $0 < f'(x) \le 4$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0) = -f(1)$..(1). Να δείξετε ότι:

Δ$_1$.Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Δ$_2$.Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}f'(\xi) = f(1)$.

Δ$_3$.Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι: $2(x-1) < f(x) < 2x$.

Δ$_4$.Ισχύει $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| < 1$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Δ$_1$. Ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και αφού f συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει ότι f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Άρα για

$0<1 \Rightarrow f(0) < f(1) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) < 0$, και $f(1) > 0$. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση f στο $[0,1]$ και έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,1]$ αυτό είναι μοναδικό.

Δ$_2$. Θεωρούμε συνάρτηση $G:[0,1]\to R$ με $G(x)=f(x)-2f(1)x$. Η G είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και

- $G(0)=f(0)$
- $G(1)=f(1)-2f(1)=-f(1)\overset{(1)}{=}f(0)$. Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2f(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(\xi)=f(1).$$

Δ$_3$. Έστω $0<x<1$.

- Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[0,x]$ για την συνάρτηση f. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Όμως ισχύει :

$$0<f'(x_1)\leq 4\Rightarrow 0<\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq 4\Leftrightarrow 0<f(x)-f(0)\leq 4\Leftrightarrow$$

$$f(0)<f(x)\leq f(0)+4\ (\alpha)$$

- Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[x,1]$ για την συνάρτηση f. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$. Όμως ισχύει :

$$0<f'(x_2)\leq 4\Rightarrow 0<\frac{f(1)-f(x)}{1-x}\leq 4\Leftrightarrow 0<f(1)-f(x)\leq 4(1-x)\Leftrightarrow$$

$$f(1)-4(1-x)\leq f(x)\leq f(1)\ (\beta)$$

Από (α) και (β) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$f(0)+f(1)-4(1-x)<2f(x)<f(0)+f(1)+4x\Leftrightarrow 2x-2<f(x)<2x.$$

Δ$_4$. Από το Δ$_2$ ισχύει ότι :

$$f'(\xi)=2f(1)\overset{0<f'(x)\leq 4}{\Rightarrow} 0<2f(1)\leq 4\Rightarrow 0<f(1)\leq 2\overset{f(1)=-f(0)}{\Rightarrow} -2\leq f(0)<0.$$

Άρα έχουμε $0<f(1)\leq 2$ και $-2\leq f(2)<0$

Ορίζουμε συνάρτηση $h_1(x)=f(x)-2x$, $x\in[0,1]$. Έχουμε ότι $h_1(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και h_1 δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$ από ερώτημα **Δ$_3$**.

Οπότε : $\int_0^1 h_1(x)\,dx<0\Rightarrow \int_0^1\left(f(x)-2x\right)dx<0\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1$

$\int_0^1 f(x)\,dx < 1 (\delta)$

Ομοίως Ορίζουμε συνάρτηση $h_2(x) = f(x) - (2x-2)$, $x \in [0,1]$. Έχουμε ότι $h_2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και h_2 δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$ από ερώτημα $\mathbf{\Delta}_3$.

Οπότε :

$$\int_0^1 h_2(x)\,dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) - 2x\right)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 (2x-2)\,dx = \left[x^2 - 2x\right]_0^1 = -1$$

$\int_0^1 f(x)\,dx > -1 (\varepsilon)$

Από (δ) και (ε) ισχύει ότι $-1 < \int_0^1 f(x)\,dx < 1 \Leftrightarrow \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| < 1$.

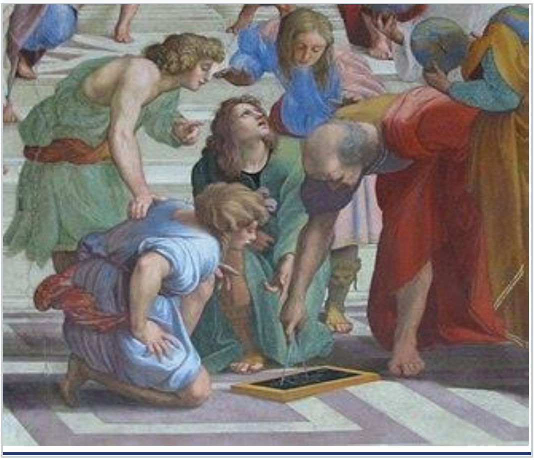
■

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: Μαλλιαράκης Αντώνης

Η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ " Κ Υ Κ Λ Ο Σ "
ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΕΡΧΟΜΕΝΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Ο **Πιερ ντε Φερμά** (γαλλικά: *Pierre de Fermat*) (17 Αυγούστου 1601 - 12 Ιανουαρίου 1665) ήταν Γάλλος νομικός στο κοινοβούλιο της Τουλούζης και ερασιτέχνης μαθηματικός με μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Ειδικότερα είναι γνωστός για την ανακάλυψη μιας πρωτότυπης μεθόδου υπολογισμού των ελάχιστων και μέγιστων σημείων σε καμπύλες γραμμές, η οποία είναι ανάλογη με τον τότε ακόμα άγνωστο διαφορικό λογισμό.

Επίσης είναι γνωστός και για τις έρευνές του για στη θεωρία αριθμών, την αναλυτική γεωμετρία, τη θεωρία πιθανοτήτων και την οπτική. Κυρίως όμως είναι γνωστός για το **τελευταίο θεώρημα του Φερμά**, το οποίο περιέγραψε σε μια μικρή σημείωση στο βιβλίο *Αριθμητικά* του Διόφαντου.



Λεπτομέρεια από τον πίνακα Η σχολή των Αθηνών του Ραφαήλ που δείχνει έναν Έλληνα μαθηματικό - ίσως αντιπροσωπεύει τον Ευκλείδη ή τον Αρχιμήδη- να χρησιμοποιεί μια πυξίδα για να ζωγραφίσει μια γεωμετρική κατασκευή.
<ΒΙΚΙΠΑΙΔΕΙΑ>