ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ′ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2026

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ .133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ .51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ .185

Α4. α)Λ ,β)Σ , γ)Σ , δ)Σ , ε)Λ

Θέμα Β

$f\colon (1, +\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = 2\ln(x-1)$
$g\colon [2, +\infty)\to\mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x-2}+1$

1) $h = f\circ g$

$D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
$= x \geq 2$ και $\sqrt{x-2}+1 > 1$
$\sqrt{x-2} > 0$
$x \neq 2$
$=(2, +\infty)$

$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2}+1-1) = 2\ln\sqrt{x-2} = \ln(x-2)$
$x > 2$

$B_2)\ h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0, \forall x > 2, h \nearrow (2, +\infty)$

Η h "1-1" και αντιστρφεται.

$$\begin{cases} h(x) = y \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2) = y \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = e^y \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y + 2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

$$B_3)\ \lim_{x\to 2}\left(h(x)\frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x\to 2} h(x) \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \cdot f'(2)$$

$$= (-\infty)\cdot 2 = -\infty$$

$f'(x) = \frac{2}{x-1} \qquad f'(2) = 2$

Θέμα Γ

$\Gamma_1)\ f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1}$

Η C_f οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$

$y = x$ εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$

Η Cf οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ άρα

Η y=x είναι η εφαπτομένη της Cf στο (0,0) , άρα $f(0) = 0$ και $f'(0)=1$

$f'(x) = \frac{(3\kappa x^2+\mu)(x^2+1)-2x(\kappa x^3+\mu x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{3\kappa x^4+3\kappa x^2+\mu x^2+\mu-2\kappa x^4-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{\kappa x^4+(3\kappa-\mu)x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3+x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2}$

$\kappa = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \in \mathbb{R}$

$\kappa \neq 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \kappa x$

$\begin{cases} +\infty, \kappa > 0 \\ -\infty, \kappa < 0 \end{cases}$

άρα $\kappa = 0$

Γ_2 i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ • f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή

$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	
			τ.ε.		τ.μ.		

Η f γνησίως αύξουσα στο [-1,1] και η f γνησίως φθίνουσα στα (-∞,-1] , [1,+∞)

Η f παρουσιάζει τ.ε. στο -1, το $f(-1) = -1/2$, και τ.μ. στο 1, το $f(1) = 1/2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

Γ2) ii)

Η f γνησίως φθίνουσα στο (-∞,-1] και συνεχής με $f((-\infty,-1]) = [-\frac{1}{2}, 0)$

Η f γνησίως αύξουσα στο [-1,1] και συνεχής με $f((-1,-1]) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞] και συνεχής με $f((1,+\infty]) = [0, \frac{1}{2})$

Τελικά $f(A) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Αν α=0 $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μια ρίζα για x=1

Αν α≠0 $f(x) > \frac{1}{2}$ είναι Αδύνατη διότι $f(A) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Γ3

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx$

$= \left[\ \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\ \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ \ln(x^2+1)\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$

$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$

Για $\nu = 0$: $\quad I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + I_1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

Για $\nu = 1$: $\quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

ΘΕΜΑ Δ

g: ℝ→ℝ , παραγωγίσιμη και συνεχής , με $0 < g(x) < 1$ και $g'(x) \neq -1$,για κάθε x∈ℝ.

Δ1) Έστω $\varphi(x) = g(x) + x$, με x∈ℝ .

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο [-1,0] .

Η g συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$\varphi(-1)\cdot\varphi(0) = (g(0) - 0)(g(-1) - 1) < 0$,αφού $0 < g(x) < 1$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε :

$\varphi(x1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Η φ παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\varphi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$, καθώς $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

η φ′ συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο ,

άρα η φ γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα το x_1 μοναδικό

Δ_2) $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

Η f παραγωγίσιμη, άρα

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)-0}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-}[x(g(x)+x)] = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\epsilon\phi x}{x} - \kappa \right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right)$

$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa = 3 - \kappa$

Πρέπει $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow 3 - \kappa = 0$

$\Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ_3 i) $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$

$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ρα $\sigma\upsilon\nu x > 0$

$f \nearrow [0, \frac{\pi}{2})$

$f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x))$

$=[0, +\infty)$ ρα $f(x) \geq 0$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)$

$= 0 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$

ii) $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Το $\frac{\pi}{3} \in f([\,0 , \frac{\pi}{2}))$ και η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[\,0 , \frac{\pi}{2})$.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα $x2 \in (\,0 , \frac{\pi}{2})$.

Δ_4 i) από Δ_1, η $\phi(x) = g(x) + x$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\phi \nearrow \mathbb{R}$ ή $\phi \searrow \mathbb{R}$
$x_1 < 0$ και $\phi(x_1) = 0$ και $\phi(0) = g(0) > 0$
άρα $\phi \nearrow \quad [x_1, 0)$
άρα $\phi(x) = g(x) + x \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0)$
άρα $f(x) = x^2(g(x) + x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0)$
και για $x = 0, \quad f(0) = 0$
άρα $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0]$

ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0)$
και $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$

και $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$

άρα το $E(\Omega) = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$
Αλλά ο $y'y$ χωρίζει το $E(\Omega)$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία, άρα
$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \quad (1)$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \left[\ x^3 g(x)\ \right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx$$
$$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx$$

Αλλά $f(x) = x^2(g(x)+x)$

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$$
$$\Rightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$$
$$\overset{(1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)\,dx - \int_{x_1}^{0} x^3\,dx$$
$$= \left[\ -2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\ \frac{x^4}{4}\ \right]_{x_1}^{0}$$
$$= -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi^2}{18} - (-2) - \left(0 - \frac{x_1^4}{4}\right)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 + \frac{x_1^4}{4}$$
$$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}$$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = x_1^4 - 3\left(\ 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}\ \right)$$

$$= x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4}$$

$$= \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ

ΡΕΝΙΑ ΦΑΡΣΑΡΗ

ΤΣΙΧΛΑΚΗΣ ΣΠΥΡΟΣ